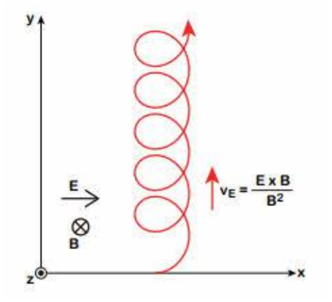


レポート

核融合への手引き (6) 荷電粒子の磁場閉じ込め原理と運動方程式

SCE・Net　郷　茂夫

R-９０
発行日：
2023 年
１月２０日

（左上枠のイラストは，今回学ぶ磁場中の荷電粒子の**ドリフト運動曲線**です．これは前回学んだサイクロトロン運動によるらせん曲線ではありません．別形状の３次元曲線です.）
（見出し番号は，前回その(5)「荷電粒子の電場，磁場中での運動」のつづきです.）
（電磁気学，力学の**ベクトルの物理記号の表示方法**；その(3) で定めた字体を使用します.）

今回の分割レポート (6)は，前回レポートの「荷電粒子の電場，磁場中での運動」で要点を述べましたが，その要点の根拠となる<u>単一の荷電粒子の基本運動方程式について</u>です．式で見た方がかえって理屈が明快になるのではと思います．ただ本文で述べる大部分は，前提となる運動方程式とその結論の数式です．途中の数式展開は参考文献の専門書（大学講義用補助資料など）を見てください．なお，数式を見るのがお嫌いな方は前回レポートの 「**6-1，6-2** 」の要点を頭に入れるだけでも十分と思います.

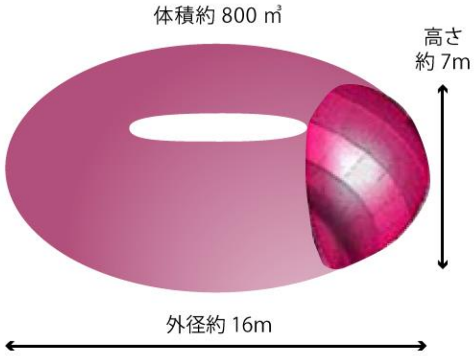
なお，今回のレポート本文は８ページですが，ベクトルの数式誘導が多く，ベクトルの計算（特に掛け算）がわからないと何を言っているのか理解できないと思いますので，「**Appendix**」**を添付し，ベクトル計算の復習として 6 ページを追加**しています．ちょっと長くてすみません.

７．電場，磁場中での荷電粒子の運動方程式

7-1　トカマクの形状について

トカマク式核融合超高温プラズマ反応器につきましては，後日のレポートで少し詳しくお話しするつもりですが，最初の原理「荷電粒子の電場磁場中での運動」を見る時に，その運動方程式の意味とか目的が漠然としていては興味も薄れると思いますので，できるだけ具体的にイメージを持っていただくために，ここでトカマクの幾何学的形状について触れておきます.

トカマクの形状を図 7-1（濃いピンク部分）に示す．図 7-1 の奥側がちょっと細くなって見えるが，形状は周囲対象ドーナツ型である（幾何学では**トーラス**形というが，このレポートでは大体「ドーナツ型」を使う）．大きさは図 7-1 の通り．正しい言い方をすれば，自然にできたドーナツ型のプラズマがそういう形状で存在するということではなく，<u>奔放に姿を変えるプラズマを磁場や電場で強引に圧力をかけて，その形にしているということ</u>である.
図 7-2 に ITER 本体の中心部を示す．ドーナツ形プラズマを収容する**真空容器**と，外側の太枠の鳥かごのようなものが **３組ほどある超電導コイル**である（詳細は後日説明する).
ちなみに，ITER のドーナツ形プラズマ内は常温ではほぼ真空なので，この 800m³ ドーナツ内のプラズマの質量は全体でも約１グラムしかない．そのように稀薄でも核融合反応により巨大エネルギーが発生するわけである.

<table>
<tr><td colspan="2">


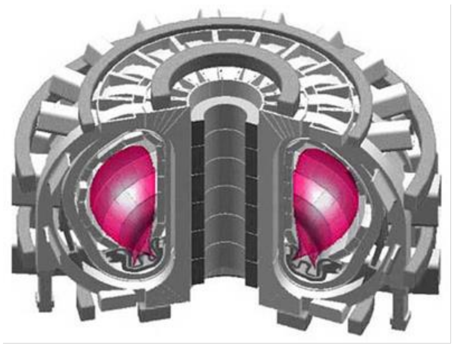


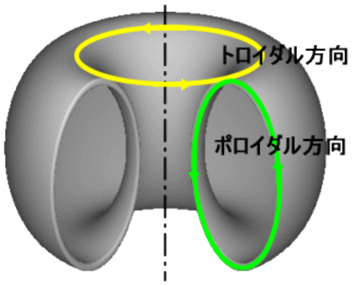
図 7-1．トカマク内のプラズマ形状　　　　図 7-2 ITER の本体中心部の略図
出典: 上の 2 つの図とも　ITER の本体 | 核融合実験炉 ITER 日本国内機関・QST
</td></tr>
<tr><td>トーラスの幾何学的名称</td><td>ドーナツ（トーラス）状のプラズマの中心対称軸をまわる方向（黄色）を<u>トロイダル方向</u>という．ドーナツの断面を周回する方向（緑色）を<u>ポロイダル方向</u>という．
大半径：回転対称軸まわりの半径，
小半径：ドーナツ断面の円状の半径．


図 7-3　トーラスの方向名称
出典：核融合用語集 (qst.go.jp)
</td></tr>
</table>

7-2　磁場閉じ込めに関わるサイクロトロン運動とドリフト運動

前回レポート(5)で示しました図 6-6 を再掲（下の 図 7-4）しますが，この絵と対比しながらサイクロトロン運動とドリフト運動がどういう意味を持つかを見たいと思います．

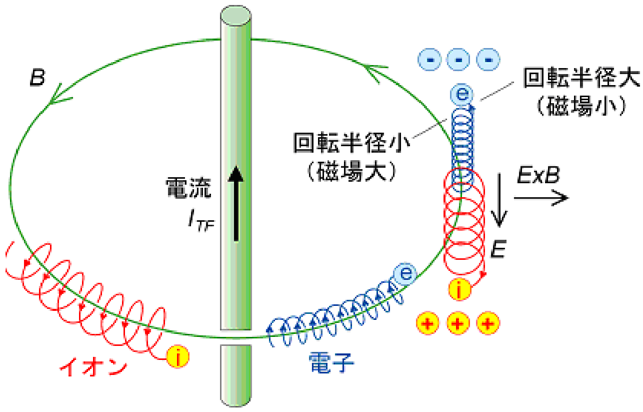
<table>
<tr><td>磁束に巻き付く荷電粒子のサイクロトロン運動と それが上下に移動するドリフト運動が核融合トカマク・プラズマ内で起こる</td><td>下の図 7-4 では，周回している磁場 B があり，荷電粒子はサイクロトロン運動によりこの磁力線に巻き付く．また，磁力線とは直角方向のドリフト運動により荷電粒子は上下に等速移動をするとともに，電荷＋/−によって移動方向は逆となり，結果，電荷が上下に分離することを示している．


図 7-4 単純トーラス磁場中でのイオンと電子の振る舞い
出典：「イメージング計測が解明した核融合プラズマの謎」 - SCI(サイ)シンポジウム準備ページ (digitalmuseum.jp) より，図 2 引用
</td></tr>
<tr><td>磁場閉じ込めの基本原理</td><td>(1) トカマクでは，超電導コイルによりプラズマ中にトロイダル方向の周回磁場を造る．図 7-4 の B はそれを代表で示している．荷電粒子がこの周回磁力線に巻き付いて離れないならば，荷電粒子をこの周回磁場のあるドーナツ空間内に閉じ込めることができることになる．</td></tr>
</table>

磁場閉じ込めを破る粒子運動の典型例	(2) しかし、**外力の作用又は磁場の不均一性により上下向きにドリフト運動が起こり、荷電粒子の磁場閉じ込めが破られてしまう**．また，**電荷が分離するため上下方向に電場ができ**て，その電磁場によって荷電粒子は外側向きにローレンツ力を受け，外側に移動するような運動が起こる．

安定な核融合反応の遂行のためには，安定なプラズマ形状維持が必須ですが，上述のようにドリフト運動がプラズマ安定性を破ることになり，このドリフト運動による不都合を制御することが，トカマク・プラズマの最重要技術の１つです．

以下，ドリフト運動が何故起こるかを，運動方程式を見ながら勉強したいと思います．

7-3　単一の荷電粒子の電磁場中での運動方程式とドリフト運動

（仮定と運動方程式の前提等）

この節で扱う粒子運動の仮定，略号，記号の前提 基礎となる**力学関係式** 基礎となる**運動方程式**	(1) 単一の荷電粒子（イオン，電子）の電磁場中における運動を本節で見る．なお、荷電粒子が加速度運動している場合、その荷電粒子自身による電磁場の近接効果が存在するが、その影響は極小さいので無視する． (2) 空間は，x，y，z の三次元とし，経過時間は t で表す． (3) ベクトル記号と成分表示；電場 $\boldsymbol{E}$（Ex,Ey,Ez），磁場（磁束密度）$\boldsymbol{B}$（Bx,By,Bz)，荷電粒子運動速度　$\boldsymbol{v}$（v_x，v_y，v_z）　で表す． (4) スカラー量と記号：粒子の質量 m，電荷量 q，これらは定数とする． (5) 荷電粒子の運動は 時刻 t の位置 p（x,y,z）と速度 $\boldsymbol{v}$（t）で見る． (6) 荷電粒子に作用する力は以下の**基礎式**で与えられる． $\boldsymbol{F}(t) = q\boldsymbol{E} + q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$　　　（式 7-1） この $\boldsymbol{F}$ を**ローレンツ**（Lorentz）**力**という．ここで，（式 7-1)左辺第一項は電場中で荷電粒子が受ける**クーロン力**である． ここで「×」はクロス積（外積）である． 外積については本レポート末の Appendix を参照． (7) F = mαの力学基礎式を使えば，以下の**運動方程式**が与えられる． $m(d\boldsymbol{v}/dt) = q\boldsymbol{E} + q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$　　　（式 7-2） (8) 電場や磁場の方向を便宜上特定の軸方向に取ることがあるが，都度指定する．ただ，磁場は Z 軸方向（x-y 平面に垂直方向となる）にとる場合が多い． (9) 磁場には一様（均一）な磁場と不均一な磁場があることに留意． (10) 磁場，電場とは別に，荷電粒子に「外力」が作用する場合があることに留意．外力としては重力 $\boldsymbol{F_g}$ や遠心力 $\boldsymbol{F_{cf}}$ がある．7-4 で解説する．

3 次元空間の粒子運動の理解にはベクトル計算の理解が必須です．様々なケースのドリフト運動のベクトル計算（大きさ，方向）は見ただけでは何を意味しているのか解りません．ベクトルの公式と計算法，その前提となる行列の計算について本書末の Appendix に載せています．

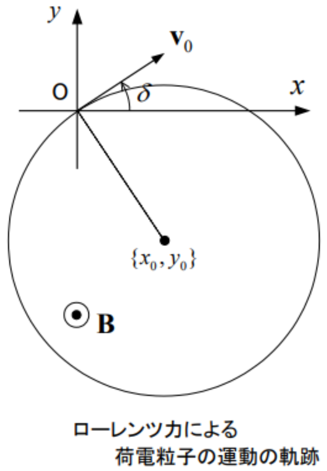
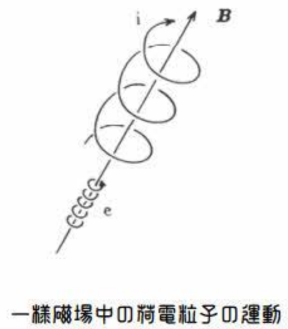
（**一様な電場中**の荷電粒子の運動）

まず，電場だけの中の荷電粒子の運動[7)]	（式 7-2）において，電場は y 方向にのみ一様とすると $\boldsymbol{E}$（0,E_y,0）で E_y は一定値，磁場はゼロであるから $\boldsymbol{B}$（0,0,0）．従って，電場中の荷電粒子の運動方程式は E_y だけを考えればよいから，次式で与えられる．

等加速度運動 [7]	$m(dv_y/dt) = q E_y$ （式 7-3） これを解いて $v_y = (q E_y/m)\ t + v_{y0}$ （式 7-4） (式 7-4)から，<u>**荷電粒子は一様な電場の方向に等加速度運動をする**</u>ことになる．速度 v_y は初速度に加えてどんどん加速されて速くなる． なお，v_x，v_z は運動方程式の積分で，v_{x0}，v_{30} が定数で残り，x, z 方向には，粒子に初速があれば，v_{x0}，v_{30} の等速度運動をする．
ドーナツ閉空間の 電場，電流	ドーナツ型のような閉空間の中に荷電粒子が存在する場合，電磁誘導によって起電力が生じる（そのメカニズムは後日のレポートで述べる）と，<u>**荷電粒子自体は抵抗を持つ導電体であり，起電力の方向に電流が流れる**</u>．すなわち<u>荷電粒子はエンドレスにドーナツ空間をぐるぐる周回</u>する．この場合，電場はトロイダル方向に曲率を持つことになる．

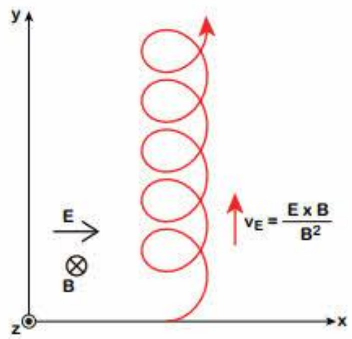
（**一様な磁場中**の荷電粒子の運動）

次に，磁場だけの中の荷電粒子の運動を考える [1), 2), 3)] 入射方向に依らない，同様の結果を得る	（式 7-2）において，電場はないので $\boldsymbol{E}$ (0, 0, 0)である．従い， $m(d\boldsymbol{v}/dt) = q\ (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ （式 7-5） である． $(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$はベクトルの外積なので，一般的なデカルト座標系での運藤方程式は，x，y，z が交差して解法がむずかしくなる．そこで，$\boldsymbol{B}$ $(0, 0, B_z)$となるように磁場を Z 方向に合わせた座標系をとると，交差表記が簡単になり，（式 7-5）の運動方程式を速度成分表示で書けば， $\left.\begin{aligned} dv_x/dt &= (q\boldsymbol{B}/m)\ v_y \\ dv_y/dt &= (q\boldsymbol{B}/m)\ v_x \\ dv_z/dt &= 0 \end{aligned}\right\}$ （式 7-6） z 軸方向には静止あるいは等速運動するだけであるから，以下，x-y 面での運動だけ考えることにする．(式 7-6)は成分が相互に関係する項を含んでいるので，もう一回微分して，もとの式を代入し，v_xとv_y についての独立な 2 階の常微分方程式を得る． $\left.\begin{aligned} d^2v_x/dt^2 &= -\Omega^2\ v_x \\ d^2v_y/dt^2 &= -\Omega^2\ v_y \end{aligned}\right\}$ （式 7-7） ここで，$\Omega = \|q\|B_0/m$，は**サイクロトロン周波数**と呼ばれる． これはふつうの単振動の式なので，途中の式誘導は省略するが， それを解いて，v_x，v_y 成分の速度として以下を得る [1)]． $\left.\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos(-(q\boldsymbol{B}/m)t + \delta) \\ v_y &= v_0 \sin(-(q\boldsymbol{B}/m)t + \delta) \end{aligned}\right\}$ （式 7-8） δは初速の x 軸に対する角度（図 7-5 を参照）． 再度，積分すると位置として，以下を得る [2)]． $x = -r_g \sin(\Omega * t + \delta) + x_0$ （式 7-9） $y = (\|q\|/q)\ r_g \cos(\Omega * t + \delta) + y_0$ （式 7-10） $z = v_{/\!/} t + z_0$ （式 7-11） ここで，$r_g = \|v_\perp\|/\Omega$，は **Larmor 半径**と呼ばれる． （式 7-12） （δ，初めの位置 x_0、y_0、z_0 は定数．添字の ⊥、// は<u>磁場に「垂直」「平行」</u>という意味である．） なお，Larmor 半径（円軌道半径）は荷電粒子速度に比例することを覚えておこう((式 7-12)より自明である)．

円運動 粒子の+/−で回転方向は逆となる[1), 2), 3)] **らせん運動** **サイクロトロン運動**[1), 2), 3)] **ここ重要！**	上記の方程式の導出の結果として， (1) 位置の軌道は、x-y 面に投影すると，図 7-5 に示すように完全な**円運動**である． (2) 陽子などの<u>正電荷では磁場の向きに対して左ネジが進む方向</u>（左手巻）、電子などの<u>負電荷では右ネジが進む方向</u>（右手巻）となる． (3) この円運動と磁場平行方向の運動 v∥（速度$v_z = v_{z0}$ の初速度の時）を合成すると、<u>**螺旋（らせん）運動**となる．このような運動を、**サイクロトロン運動**</u>と呼ぶ． (4) ローレンツ力は，荷電粒子の運動に対して，ただその方向を変えるだけで，<u>**速度の大きさを変えるような仕事（エネルギー供与）はしない**</u>ことがわかる．  図 7-5 サイクロトロン運動 出典：appendix1.pdf (kyoto-u.ac.jp) の図 2
磁力線に巻き付着くイメージ	図 7-6 一様磁場中の荷電粒子の運動 出典：untitled (u-tokyo.ac.jp) よりの図を引用． 図 7-6 より磁力線に巻き付くイメージがわかる．+/−荷電により，巻き付く方向は逆である．図 7-4 とも一致している．これがトカマク核融合プラズマ内の荷電粒子の運動の 1 つである．これだけなら制御も容易なはずだが． 

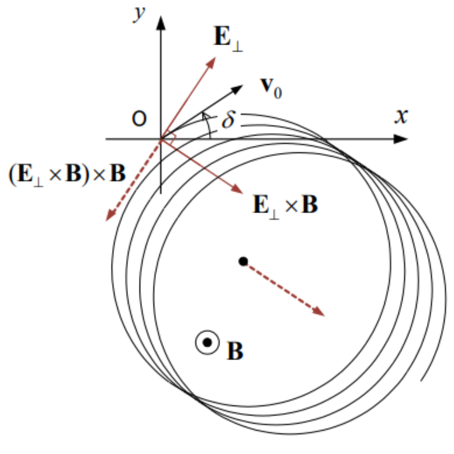
7-4　ドリフト運動

（磁場・電場中でのドリフト運動）

磁場，電場中での運動 **ドリフト運動とは**[1),2)]	ここでは，電場 E と磁場 B の両方が荷電粒子に作用する場合を取り扱う．電場の方向と磁場の方向の関係が一般的な場合（ランダムということ）については，複雑な数値的な解析が必要で，難しいので省略する． しかし，電場 E と磁場 B の座標軸の取り方を限定－電場と磁場が直交する場合－すれば，荷電粒子の運動をより易しく解析的に知ることができ，その運動は「**E×B ドリフト**」として知られている． ここで表紙のイラストの再登場となる． 図 7-7 $E \times B$ ドリフト運動． 出典：Ch01.pdf (t-shirafuji.jp) の図 1.3 を引用；磁束密度 B が z 軸の紙面に突き刺さる方向に存在し，電場が X 軸の正の方向に存在する状態で，正の荷電粒子が x の正方向に初期速度を持っていた場合の荷電粒子の軌道を示す． 

ドリフト運動の物理的解析； **電場と磁場が直交**する場合 **E × B ドリフト** [1), 2), 3)] **移動方向は同じ** [1), 2), 3)]	荷電粒子は 3 次元中をランダムに動く(v の成分を（v_E, v_B, $v_\perp$）とする)わけだから，$\boldsymbol{E}$ の $\boldsymbol{B}$ と並行な成分を $E_{/\!/}$（スカラー）とし，$\boldsymbol{B}$ に垂直な平面への射影を $E_\perp$(ベクトル）とすると，その荷電粒子の運動方程式は，次式のようになる． $m\, dv_{/\!/}\ dt = q\boldsymbol{E}_{/\!/}$　　（式 7-13) $m\, dv_\perp\ dt = q\boldsymbol{E}_\perp + q\,(v_\perp \times \boldsymbol{B})$　　(式 7-14) ここで，簡単のため，$v_\perp$ を $\boldsymbol{E} + v_E \times \boldsymbol{B} = 0$　　(式 7-15) となるような v_E とそれ以外の成分 v_B を用いて，以下 のように表しておくことにする． $v_\perp = v_B + v_E$　　(式 7-16) この (式 7-16) で表される $v_\perp$ を (式 7-14) に代入すると， v_B のみに関する以下の式が得られる． $m\, dv_B /dt = q\,(v_B \times \boldsymbol{B})$　　(式 7-17) この式は，速度 v_B なる速度を有する荷電粒子に磁場 $\boldsymbol{B}$ だけが作用したときの運動の方程式になっている．これ は，$v_\perp$ の成分の内，$\boldsymbol{B}$ のみが原因となって生じる回転 運動に対応する速度成分だけを取りだしたものが v_B となっていることを意味する． 一方，$v_\perp$ を簡単のために分離した(式 7-16)の，もう一つの成分である v_E については，(式 7-15) で示される関係があると 予め決めていたわけだから，（式 7-15) の両辺の右側に $\boldsymbol{B}$ を外積し， ベクトル公式（Appendix 参照）を使うと，以下の結論式が得られる． $v_E = (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) / \boldsymbol{B}^2$　　(式 7-18) この速度成分 v_E は，電場と磁場に直交する方向を持つ．また，電場と磁場の大きさが一定である から，この速度成分の大きさは一定値となる． 従って，v_B と v_E の合成ベクトルで表される合成速度 ベクトル $v_\perp$ によって駆動される荷電粒子の軌道は，v_B 成分による回転運動をしながら，その回転中心が v_E で 並進する運動となる，ということがわかる． 「(式 7-18) を誘導するには，巻末添付 Appendix に記載したベクトル公式を用いて式変形は以下となる． 用いる公式：$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}$　　(公式 2) (式 7-15) の右辺から B を外積し，移項すると， $E \times B = -(v_E \times B) \times B$　　(式 7-20) $= B \times (v_E \times B)$　　(式 7-21) $= (B\cdot B)\, v_E - (v_E \cdot B)\, B$　　(式 7-22). ここで，v_E と B は直交しているので，$v_E \cdot B = 0$ である． また，$B\cdot B = B^2$ である．従って，(式 7-18) が得られる．」 以上が（式 7-18) の誘導であるが，理解はかなり難しいかもしれない． このようなサイクロトロン中心の運動のことを一般に**ドリフト**といい、ここで示した磁場と電場との共存状況によるドリフトを E×B ドリフト（イークロスビー= ドリフト）と呼ぶ. **E×B ドリフトは、粒子の電荷の正負に依存せず同じ方向であることがおもしろい.**

<table>
<tr><td></td><td>（追記 7)）
この電磁場による<u>ドリフトのベクトルの大きさは　E/B，方向は $E\times B$　である</u>.
ドリフトの方向は電荷に依存しない．z 方向には等加速度運動をするので、３次元的には傾いてピッチが変化するらせん運動になる．

図 7-8 クーロン力とローレンツ力が作用するときの荷電粒子の軌跡
出典：appendix1.pdf (kyoto-u.ac.jp)　図 3 より引用</td><td>

クーロン力とローレンツ力が作用するときの荷電粒子の軌跡</td></tr>
</table>

（様々な条件下のドリフト現象）

<table>
<tr><td colspan="2">前項で，電場，磁場存在下の荷電粒子のドリフト運動を見たが，<u>核融合プラズマの制御においては，他の外力が荷電粒子の運動に働く場合や，磁場が一様ではなく，磁気勾配や湾曲磁場であるような状況に対処する</u>ことが必要になる．そのような場合のドリフト現象を以下に示す．数式誘導は前項に類似しており省略する．
以下に，3 例を挙げているが，<u>いずれも粒子の電荷の正負に依存した逆方向</u>（電荷により反対方向）になることに注意.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">磁場と外力場の中でのドリフト 4)

方向が反対</td><td>磁場 B と同時に、一様一定な外力 F（遠心力，重力など）が粒子にかかっているような場合を考える．電場による力は $F = qE$ であったことから類推できるように、この場合のドリフト運動は以下式となる．
$v_F = (c/q)*(F \times B/B^2)$　　　　（式 7-23）
<u>この場合は，E×B ドリフトと異なり，粒子の電荷の正負に依存した方向（反対方向）になることに注意する．</u>
<u>遠心力等の外力による影響は，トカマク・プラズマの制御にも大いに関係してくるので留意いただきたい．</u></td></tr>
<tr><td>（参考文献）
4 項　磁場と外力場の中での運動
出典：particlemotion_v0.pdf (u-tokyo.ac.jp)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">空間勾配をもつ磁場中での運動：磁気勾配ドリフト
2),4)
方向が反対</td><td>磁場が、空間的に非一様なとき（空間勾配をもつとき）を考える．電場はゼロとする．Larmor 半径は（周波数を通して）磁場強度 |B| に反比例するので磁場が小さく弱い箇所では大きい．
外力によるドリフト（前節）での議論を応用すると、この場合のドリフト運動は(式 7-23)より以下となる．
$v_F = (c/q)*(F_y/B)*x$　　　　（式 7-24）
x 方向に一定速度となる．移動の方向はイオンと電子は逆向きである．</td></tr>
<tr><td>（参考文献）
5 項　空間勾配のある磁場中での粒子運動：磁気勾配ドリフト
出典：particlemotion_v0.pdf (u-tokyo.ac.jp)</td></tr>
<tr><td>曲がった磁力線場中で</td><td>磁力線の曲率半径 Rc がサイクロトロン半径より十分大きいような曲がった磁力線中での運動を考える．サイクロトロン運動のために、粒子は磁力線</td></tr>
</table>

の運動：湾曲ドリフト [2), 4)] 方向が反対	に巻き付くような運動をする．磁場 に平行な速度成分 v∥ の向きは、粒子運動に伴い磁力線に沿って変化する。 このとき粒子に は遠心力 F_{cf} = mv^2 ∥ （1/Rc） e_r （式 7-25） が働いている．ただし e_r は、曲率中心から粒子位置へ向いた単位ベクトルである．外力によるドリフト（前節）での議論を応用すると、この場合のドリフト運動は（式 7-23）より以下となる．移動の方向は逆である． v_R = (|q|/q)(F_{cf} **B*/*B* ^{2}) （式 7-26）
	（参考文献） 6 項　曲がった磁力線場中での粒子運動：湾曲ドリフト 出典：particlemotion_v0.pdf (u-tokyo.ac.jp)
他のドリフト例	いろいろあると言うので，文献を探索し参照願う．

以上で，ドリフト運動について理論的な解説をしましたが，数式の理解は難しいと思います．しかし，このドリフト運動がプラズマの制御を乱す大きな要因の一つであり，それに対処するために大きな超電導コイルを複雑に組み合わせて操作しプラズマの閉じ込めと安定化を保とうとしているわけです．

文献

1） appendix1.pdf (kyoto-u.ac.jp) ，解説： 荷電粒子の運動（速度と電磁場の相互作用）
2） particlemotion_v0.pdf (u-tokyo.ac.jp) ，荷電粒子の運動
3） 一様な磁場と電場中の運動 (physics.thick.jp) ，一様な磁場と電場中の運動
4） untitled (u-tokyo.ac.jp) ，一様な電磁場中の粒子ドリフト
5） Ch01.pdf (t-shirafuji.jp) ，第 1 章 荷電粒子の運動
6） 荷電粒子に働く力 (kogakuin.ac.jp) ，荷電粒子に働く力，電磁気学その 6
7） 一様な電場・磁場中の運動 (nihon-u.ac.jp) ，一様な電場・磁場中の運動
8） 荷電粒子の運動 II (nihon-u.ac.jp)
9） 「イメージング計測が解明した核融合プラズマの謎」 - SCI(サイ)シンポジウム準備ページ (digitalmuseum.jp)
10） ドリフト運動とは － 理数の散策路 (sansakuro.com)
11） ドリフト (プラズマ物理学) - Wikipedia
12） 荷電粒子のドリフト(プラズマ物理学#1) - Bing video

Appendix：（物理、数学の復習）行列，ベクトルの計算について

皆様、これは物理、数学の復習ですが、ベクトルの加減乗除を覚えていますか？ベクトルの加減は、昔から誰もがやってきたアレ，2 本のベクトルを辺とする平行四辺形（ひし形）の対角線がベクトル加減の結果の大きさであり、かつ方向です.

ならば、2 本のベクトルの掛け算は？割り算は？多分頭をひねるでしょう．掛け算はとんでもない結果になりますし、ベクトルの割り算は正式には定義されていません.

それではベクトルの加減乗（除）を以下に整理します。ただ、ベクトルは行列で表すことができるし，ベクトルの計算は行列の計算法がベースなので、まず行列の加減乗（除）を確認してからベクトルの計算に進みましょう.

（行列の計算）

行列の表示法 本レポートでは右のように書くことが多い.	$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1j} \\ a_{21} & & & \\ a_{31} & & & \\ \dots & & & \\ a_{i1} & & & a_{ij} \end{bmatrix}$	行列の第 i 行目、j 列目の成分を特に行列の（i, j）成分と言う．i と j は個別に決まり，行数と列数が同じとは限らない.
行列の加減 1)	加減は，行列 A, B に対して「$A + B$ 」という風に表現する．普通である．足し算は、**対応する成分を足し合わせるだけでＯＫ，** 引き算の場合は、プラスをマイナスに置き換えるだけでＯＫ．行列式で書けば， $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$のとき，　$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ 対応する成分同士を計算するので、**行列の縦横の数が合っていないもの同士は加算・減算できない.**	
行列のスカラー倍　1)	普通の数を掛け算することを**スカラー倍**と言う．スカラーは**どんな形の行列でも掛け算できる.** $A = [a_{ij}]$ のとき、$\lambda A = [\lambda a_{ij}]$，　λ は掛ける普通の一定数である.	
行列同士の**掛け算** 1)	ルールは簡単に言えば次の通り； • 「行列 A の**列数**＝行列 B の**行数**」でない場合は掛け算できない（別表現で言えば，そういう積 AB は定義できない）. • 積 AB は、行列 A と同じ**行数**で、行列 B と同じ**列数**の行列となる. • 積 AB の i 行 j 列成分は、行列 A の i 行の成分と、行列 B の j 列の成分を順に掛けて足したもの.	
計算例： 1)	抽象的な公式は飛ばして，以下の例で言うと. A の列数は 3 で、B の行数も 3 の場合，もちろん積 AB は求められる. A の行／列数 2/3 で、B の行・列数が 3/3 の場合, → 積 AB は、2 行 3 列の行列となる．（下の例を参照） #行/列数が異なる場合； $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$　$B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & 5 \end{bmatrix}$ A の 2 行成分と B の 3 列成分を左から or 上から順にかけて足すと、 5*3+(-2)*1+3*5=285*3+(-2)*1+3*5=28，他の成分についても同様の計算を行うと AB は以下のようになる． $AB = \begin{bmatrix} 23 & 34 & 29 \\ 51 & 29 & 28 \end{bmatrix}$	

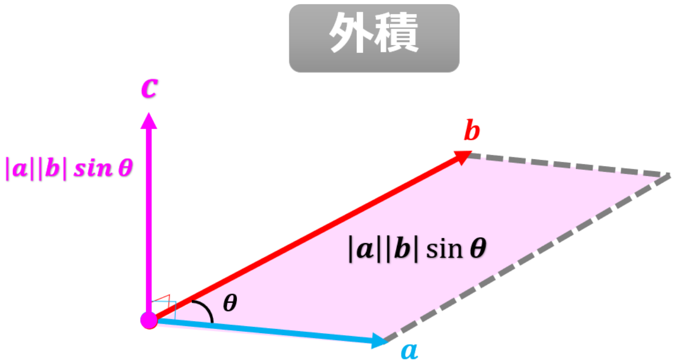
行列の**掛け算の順序の注意** [1]	行列では**掛け算の順序を入れ替えると答えが変わる**ことがあることに注意が必要である．普通の掛け算ではありえないことである． つまり，$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}$ であること．（下の計算例を参照）
計算例：	$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ があるとすると，下のように結果はまるで違う． $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ ，　$\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

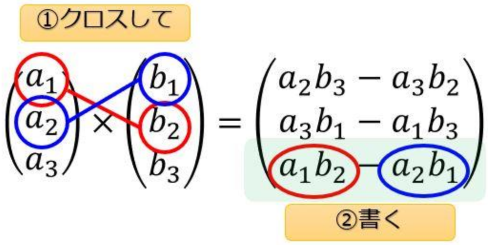
(ベクトルの計算)

記号と前提（ベクトルは***太字斜体***の***英字１字***で表す：本書での決まりとして）	● ベクトルとは，大きさと向きを有する量であり，平面または空間においては有向線分で表される． ● 3 次元空間の中にあり（デカルト直交座標軸を(x，y，z)とする）同一始点の線形独立な 3 つのベクトルを，本書では，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ とする． ● ベクトルの大きさは，$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$，$\lvert\boldsymbol{B}\rvert$ などと表す．方向は明示していない． ● これらのベクトルを１行３列の行列で表す場合を考える． 本書では，$\boldsymbol{A}$ $(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\boldsymbol{B}$ $(b_x,\ b_y,\ b_z)$，$\boldsymbol{C}$ $(c_x,\ c_y,\ c_z)$ であるとする． ● 「・」ドットはスカラー積（内積）を示す，「×」は外積を示す． ● $\boldsymbol{A}$ がある場合，「$-\boldsymbol{A}$」は $\boldsymbol{A}$ とは全く逆向きのベクトルを示す． ● 「$\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B}$」は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ は直交を意味し，「$\boldsymbol{A} /\!/ \boldsymbol{B}$」は平行を意味する．
単位ベクトル基本ベクトル [3), 4)] 詳細は文献を参照	単位ベクトルは「大きさが 1」というだけで方向の定義はない． 基本ベクトルとは、x 軸方向，y 軸方向，z 軸方向に向いた大きさ１のベクトル．下記のように表す． x 軸方向，y 軸方向，z 軸方向の基本ベクトル　i，j，k　で表す． 任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ の成分が$(a_x,\ a_y,\ a_z)$のとき、基本ベクトル i、j を用いて下式でベクトル $\boldsymbol{A}$ を表すことが可能である． $\boldsymbol{A} = a_x i + a_y j + a_z k$ そして，デカルト座標系の基本ベクトル同士の内積を次のように定義する． 自分自身との内積は 1，自分自身以外との内積は 0. $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$，$ij = j \cdot i = j \cdot k = k \cdot j = k \cdot i = i \cdot k = 0$ これらを使うと，ベクトルの理論計算式の展開に役立つ．
内積（スカラー積） [1), 2)]	**ベクトルの内積**とは２つのベクトルからスカラーを作る演算であり，「・」 で表す．$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積は以下のように定義される． 内積：$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \lvert\boldsymbol{A}\rvert\lvert\boldsymbol{B}\rvert\cos\theta$　　θ ：$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角度． つまり，内積は大きさを決め，方向は指定していない．
内積の計算 [1), 2)]	$\boldsymbol{A}$ $(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\boldsymbol{B}$ $(b_x,\ b_y,\ b_z)$について，基本ベクトルの定義を使うと， $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$　　が導かれる． これを一般のベクトル同士の内積の定義にする（ただ，大きさであって，向きは指定していない）．
ベクトル内積の意味 [2)]	ベクトルの内積とは，物理的にどういう意味があるのかを知る． ２次元ベクトルを１行２列の行列で線形変換するということは、２次元平面上のベクトルを、１次元直線上のベクトルに変換することを意味する．ベクトルの内積とは、１行 n 列の射影行列とベクトルの積であり、２次元や３次元のものを１次元化すること（＝直線上に射影すること）なのである．

ベクトルの内積の計算則 6), 7)	(1) 内積記号（ドット）の省略不可！ $A \cdot B$ を $A\ B$ なんて書いたらダメ！ (2) 交換則が成り立つ： $A \cdot B = B \cdot A$ (3) 分配則が成り立つ： $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$， など. (4) 直交している2つのベクトル（$A \perp B$ということ）の内積はゼロ. 何故なら，直交とは $\theta = 90°$ であり $\cos\theta = 0$ であるから.

(**外積**ーここが一番わかりにくい)

ベクトルの外積 5), 6), 7)	ベクトル A (a_x, a_y, a_z), B (b_x, b_y, b_z)について， **外積の結果はベクトル**と定義されるため「**外積の結果は大きさと向き**」があり，以下で求まる. (1) 外積は2つのベクトルに対して，<u>もう一つが**垂直になるような向き**に分解して大きさを計算すること</u>である. (2) 外積の大きさ：$A \times B = \|A\|\|B\| \sin\theta$， ここで θ ：A と Bのなす角度.
外積のイメージ， 以下，引用図の関係より，ベクトル記号を $A \rightarrow$ a， $B \rightarrow$ b とする. 5), 6), 7)	以下の3次元の絵で説明する．2つのベクトル a，b で張られる平面を考える．外積 a×b = ベクトル c とすると、c は a と b で張られる平面に<u>**垂直な方向に定義**</u>する．これは「定義」である． そして、大きさ |a||b|sin θ は <u>a，b で作られる**四辺形の面積**</u>である.  図 Apdx-1　外積のイメージ図 出典：文献 5)　より「外積」の図を引用. **外積の結論**は, ● 大きさ：|a||b|sin θ，四辺形面積（上図のピンク色部分), ● 方向： a，b に垂直方向　である．以下の注釈を見て欲しい.
注釈	図 Apdx-1 で，「a，b に垂直方向」と言っても，上向き垂直と下向き垂直の2つがある．それをどうやって決めるのか．その方法は，まず右手を出して a 方向に向ける．その状態で b 方向に親指以外の4本の指を折り曲げる．親指が向いた方向（図 Apdx-1 の場合は上向き）がベクトル c = a×b の方向になる. 電磁気力（電流、磁界、電磁気力）の方向を示す時に示すものだが、この概念は元々この外積の定義からから来ているという. つまり、「**右ねじの法則**」として「外積の方向」を覚えておくとよい. 見方を変えると，a×b のベクトルの順序を逆に交換すると， b×a となるが，その**方向は下向きになる**ということなのである. →下記の公式集の文献 8), 9), 10), 11) を参照.

外積の計算 5), 6), 7)	2 つのベクトル；***a***（a_1, a_2, a_3），***b***（b_1, b_2, b_3）について， 外積の計算にはいくつか方法があるが，ここでは多くやられている 「2 つのベクトルの成分をクロスしてもうひとつの成分＝計算結果に引き算型で書く」という方法を例として以下に示す．右の手順を上から下へさらに上へ順番に繰り返し，差し引き型で右辺の計算結果が得られる．  図 Apdx-2. 出典：図 Apdx-1 と同じ. 上で ◯ で囲ったのは右辺成分 3 である．成分 1 は $a_2b_3 - a_3b_2$ である．
単位が異なる場合	2 つのベクトル ***a***, ***b*** の大きさは単位が同じとは限らない． 本文の 7-4．磁場と電場の中の荷電粒子の運動を扱ったが，電場の強さと磁場の強さの掛け算は，移動速度の大きさとなり，方向は垂直ということである．

(ベクトル外積の計算則，公式)

ベクトルの外積の計算則 6), 7), 8), 9	(1) 外積記号省略不可！ $A \times B$ を $A\,B$ などと略して書いたらダメ！ (2) 交換則は成り立たない：$A \times B \neq B \times A$ であり，むしろ反交換である． (3) 分配則が成り立つ：$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ など．
スカラー3重積 $A \cdot (B \times C)$ という形 6), 7), 8), 9), 11)	$A \cdot (B \times C)$ というのは，3 つのベクトルが作る**平行六面体の体積**を表している．なぜなら $B \times C$ というのは,その絶対値が 2 つのベクトルを 2 辺とする平行四辺形の面積を表しており,その方向はその平行四辺形の面に垂直なベクトルである．それと A との内積を取るということは,その面から飛び出しているもう一つの辺の高さを掛けるのに相当するからである． 3 つの辺を入れ替えて考えてみても同じことが言えるのだから,サイクリック（循環的）に入れ替えたものは同じ値になるはずだ． サイクリックに入れ替えるというのは，A を B に，B を C に，C を A に書き換えるということである．以下の公式が成り立つ． $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$ 公式-1
ベクトル 3 重積 $A \times (B \times C)$ 6), 7), 8), 9), 11)	ベクトル三重積は、3 つのベクトル ***A***, ***B***, ***C*** について以下のように定義され、右辺の公式が成り立つ． $A \times (B \times C) = (A \cdot C)\,B - (A \cdot B)\,C$ 公式-2 （公式-2 の誘導） 公式-1 の左辺の x 成分を調べると、図 Apdx-2 を計算式に利用すると， $(A \times (B \times C))_x = A_y(B \times C)_z - A_z(B \times C)_y = A_y(B_xC_y - B_yC_x) - A_z(B_zC_x - B_xC_z)$ $= (A_yC_y + A_zC_z)B_x - (A_yB_y + A_zB_z)C_x = (A \cdot C)B_x - (A \cdot B)C_x$ これは y, z 成分についても、同様のことが成立する． 従って、公式-2 は証明された． 同様に以下も証明される． $(A \times B) \times C = (A \cdot C)\,B - (B \cdot C)\,A$ 公式 3

（行列，ベクトルの割り算）

行列同士の**割り算**は？ 逆行列の定義 1 2), 13), 14), 15), 16) 行列の四則演算	行列には**割り算は定義されていない**．しかし、代わりに**逆行列**というものを掛けることで、行列で割ったような効果をもたらすことができる． あるｎ次の正方行列**A**に別のｎ次の正方行列**B**を掛けた結果が単位行列 $\mathbf{I}_n$ になる時、この行列**B**のことを行列**A**の*逆行列*といい、「$\mathbf{A}^{-1}$」と書く． １次の正方行列すなわちスカラーの時、逆行列は次のように逆数になる．つまり逆行列は逆数を拡張したものであり、**行列の積の逆演算に相当する．** そして逆行列を定義することによって、行列の世界で和・差・積・除の四則演算が揃ったことになる． $\mathbf{A} = [a]$，$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = [1]$，$\therefore \mathbf{A}^{-1} = [1/a]$ $(a \neq 0)$，＝Aの逆数のこと． 逆行列の詳細については，引用文献 12)，13)を参照．
行列の割り算 1 2), 13), 14), 15), 16)	行列は割り算が定義されていないが，行列の割り算は、2 つの行列の行数と列数が同じである場合のみ可能である．そして非常に簡単． 例として，以下の２つの行列 $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ A_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ ，$B = \begin{bmatrix} b^{1,1} & b^{1,2} \\ b^{2,1} & b^{2,2} \end{bmatrix}$ 上の行列同士で割り算を行うと、それぞれ同じ要素の値で割り算が行われる． $A / B = \begin{bmatrix} a_{1,1} \div b_{1,1} & a_{1,2} \div b_{1,2} \\ a_{2,1} \div b_{2,1} & a_{2,2} \div b_{2,2} \end{bmatrix}$ ただし，このような計算ができない場合もある，正式には定義されていない．
ベクトルの割り算 逆行列 1 2), 13), 14), 15), 16)	ベクトルに割り算はないが，代わりに**逆行列**というものを掛けることで、行列で割ったような効果をもたらすことができる．**つまりあるベクトルに逆行列を掛けるという作業は、ベクトルの逆変換を行っていることに相当する．** ※　逆行列については引用文献を参照． なお，ベクトルの割り算はお互いの要素の数が同じである場合のみ可能であり，お互いのベクトルの要素の数が異なる場合には割り算はできない．

（ベクトルの２乗）

ベクトルの２乗という表現， $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^2$ と書く意味 19)，20)	2 次元のベクトルの場合だと，$\boldsymbol{A}$ の成分を(x_1, y_1)とすると $\boldsymbol{A}$ の大きさ$\lvert \boldsymbol{A} \rvert = \sqrt{(x_1{}^2 + y_1{}^2)}$ となって √ が扱いにくい． そこで $\boldsymbol{A}$ の大きさの２乗 $\lvert \boldsymbol{A} \rvert^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$ (内積)$= x_1{}^2 + y_1{}^2$ の方が √ がないので扱いやすいということ． ベクトルを２乗するという意味ではない．同じベクトル同士の内積をとること．同じベクトルの内積＝ベクトルの大きさの２乗（これはスカラー量）となり、煩わしい√ ルート操作なしでベクトルの大きさを扱えるというメリットの為にベクトルの大きさの２乗（＝内積）で扱われる．それ以上の意味はない．

参考文献，引用参照サイト：

1） 行列の演算 ｜ 大学１年生もバッチリ分かる線形代数入門 (oguemon.com)
上記の主要部分すべて引用．
2） ベクトルの内積とは？誰でも理解できるようにわかりやすく解説 ｜ HEADBOOST
ベクトルの内積の意味
3） 単位ベクトルとは？1 分でわかる意味、大きさ、求め方、基本ベクトルとの違い (kentiku-kouzou.jp)

4) 単位ベクトル - ベクトル解析 - 基礎からの数学入門 (keicode.com)
5) 外積とは（ベクトル積とは）？具体的な計算方法と力学のモーメントを理解する。｜宇宙に入ったカマキリ (takun-physics.net)
6) 内積、外積の公式 - EMAN の物理数学 (eman-physics.net)
7) ベクトルの演算 - 相対論の理解とその周辺 (hirosaki-u.ac.jp)
8) ベクトルの公式一覧（計算・内積・三角形の面積・共線条件） ｜ 理系ラボ (rikeilabo.com)
9) ベクトルを総まとめ！高校で習う公式一覧 ｜ 受験辞典 (univ-juken.com)
10) vector.dvi (biglobe.ne.jp)　　　電磁気学に用いるベクトル公式集
11) ベクトル三重積の公式と証明［例題付き］ - 大学の知識で学ぶ電気電子工学 (daigakudenki.com)

＜ベクトルの割り算・逆行列＞

12) 逆行列の求め方。例題と 3 つのステップから分かる逆行列計算のコツ｜アタリマエ！ (atarimae.biz)
13) 逆行列とは？誰でも理解できるようにわかりやすく解説 ｜ HEADBOOST
14) ベクトルの割り算［物理のかぎしっぽ］(hooktail.sub.jp)
15) ベクトルと行列　逆行列 (snap-tck.com)
16) 行列の割り算はこうなっている！ ｜ 数学の星 (math-jp.net)
17) 逆行列の求め方 2 種類とその意味～行列の割り算を考える～ (linky-juku.com)
18) 3 行 3 列の逆行列の求め方　 - 理数アラカルト - (risalc.info)
計算データ投入と答えのインプットボックスがある.

＜ベクトルの 2 乗の意味＞

19) なぜ２乗するのか -今日、数Ｂのベクトルの問題を解いてて疑問に思った- 数学 ｜ 教えて!goo
20) 行列の n 乗の求め方と例題 ｜ 高校数学の美しい物語 (manabitimes.jp)

レポート (6) は以上」